



TITLE:

# 賃貸住宅市場におけるある比較静学 (ゲーム理論、数理経済学への離散凸解析の応用)

AUTHOR(S):

伊東, 多聞

---

CITATION:

伊東, 多聞. 賃貸住宅市場におけるある比較静学 (ゲーム理論、数理経済学への離散凸解析の応用). 数理解析研究所講究録 2004, 1371: 68-95

ISSUE DATE:

2004-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25475>

RIGHT:

## 賃貸住宅市場におけるある比較静学

筑波大学・システム情報工学研究科 伊東 多聞\* (Tamon Ito)  
The Graduate School of Systems and Information Engineering,  
University of Tsukuba

### 概要

非分割財としての賃貸住宅市場の均衡価格について考察する。市場に参加する経済主体は賃貸住宅の需要者である家計と供給者である大家である。賃貸住宅以外の家計の消費財は合成財として扱う。賃貸住宅は、住宅サービスとしての品質の程度により、いくつかのカテゴリに分類される。均衡において各家計は、その所得に応じて、あるカテゴリの賃貸住宅と合成財の消費の組を選択する。

賃貸住宅の均衡価格（家賃）は、この消費選択を記述したある連立方程式の解であることが示される。賃貸住宅市場の比較静学分析は、この方程式の種々のパラメータと均衡家賃の関係を考察することによってなされる。上記パラメータのひとつとして、賃貸住宅の質的特性に着目する。特に入居者が利用する交通体系の変化に焦点をあて、交通利便性の改善が賃貸住宅の均衡家賃に与える効果を考察する。また、そこで得られた結論と他のパラメータ変化の効果を対比させることにより、質的パラメータ変化の特質をとらえる。さらに東京の実際の住宅市場を用いて上記を例証する。

キーワード：賃貸住宅市場、非分割、競争均衡、家賃方程式、比較静学、時間短縮、アパート効用値、特殊・一般ケース

### 1 はじめに

本稿では非分割財としての賃貸住宅の市場を議論する。議論の中心は、市場構造の変化に伴う住宅賃貸料（以下、均衡家賃）の変化を考察する比較静学である。具体的には、都市の賃貸住宅（以下、アパート）の質的变化に伴って、均衡家賃がどのような挙動を示すかについて考察するものである。

質的变化とはアパートの住宅サービスとしての品質、すなわち入居者が通勤に利用する交通体系の変化、またはアパートの居住性の変化などを意味する。本稿の比較静学の結果より、例えば交通体系の改善は市場全体の均衡家賃を増加させるのではなく、その効果は局部的で、都心部などではむしろ家賃が下落するといった構造が明らかになる。以下、本稿で用いる賃貸住宅市場のモデルと上述の質的变化の比較静学について述べる。

賃貸住宅市場のモデル  $(M, N)$  はアパートの買い手（以下、家計） $M$  と売り手（以下、大家） $N$  とからなる。家計のその他の消費は合成財として扱う。アパートは賃貸契約に基づく

---

\*taito@shako.sk.tsukuba.ac.jp

表 1: カテゴリ表の例

所要時間 (分) と駅名	広さ ( $\text{m}^2$ )							
	<25		26-45		46-65		66-85	
18: 中野	15	19.2	10	95.2	5	171.2	1	247.2
29: 吉祥寺	17	-3.9	12	72.1	7	148.1	2	224.1
42: 国分寺	18	-31.2	13	44.8	8	120.8	3	196.8
49: 立川	19	-45.9	14	30.1	9	106.1	4	182.1
60: 八王子	20	-69.0	16	7.0	11	83.0	6	159.0

凡例

$k$	$h_k$
-----	-------

一種のフローで、これを非分割性の正常財として扱う。またアパートは、その品質の水準に応じて何種類かのカテゴリに分類できるとする。実際に品質水準を定めるのは、アパートの属性（部屋の広さや通勤に要する時間など）から家計が得る効用値で、同一のカテゴリに属するアパートは無差別であるとみなされる。

カテゴリの概念を最も簡単に表現するのは、表1のような通勤時間と部屋の広さからなる表で、本文中でも同様の表を用いる。表1の左側の欄は東京駅から各地の駅までの通勤時間で、表の最上段は部屋の広さの区分である。これによると、ある通勤時間と広さ区分の組み合わせ（セル）が一つのカテゴリとなる。例えば東京駅から18分の中野駅周辺で、 $66\text{m}^2$ から $86\text{m}^2$ 級の広さのアパート群が一つのカテゴリをなす。表1の各セルは2つの数値からなり、右側の実数値が上に述べたアパートの効用値で、左側の整数値はその効用値のカテゴリ全体における順位である。

表1では東京駅（都心）に近く、より広いアパートほど大きい効用値を与えられている。従って、例えば、東京駅から立川駅までの所要時間が短縮されれば、立川駅の欄に属するすべてのカテゴリで効用値の増加が生じる。このような変化に伴う均衡家賃の変化を考察することが本稿の主題となる。

均衡家賃は各カテゴリの均衡価格からなるベクトルで、これは家賃方程式と呼ばれる連立方程式体系によって定義される。家賃方程式では、限界家計および限界カテゴリという概念が重要な役割を果たす。限界家計とは均衡状態の各カテゴリについて、そのアパートに同居する家計群のうち最も所得が小さい家計をいう。また、限界カテゴリとは全カテゴリのうち最も低品質のカテゴリをいう。（詳しくは2.4節で定義する。）

家賃方程式は、均衡における限界家計のアパート選好を記述しており、あるカテゴリとそれより1段階だけ低水準のカテゴリ間の無差別関係を、全カテゴリにわたって連立方程式として記述したものである。さらにこれは市場均衡の必要条件となっている。これにより、限界カテゴリの家賃を与件として、その他のカテゴリの均衡家賃が連立方程式の解として一意に定まる。

上記の均衡家賃と家賃方程式の関係の上に  $(M, N)$  の比較静学の基礎理論が構築される。すなわちそれは、市場のパラメータ変化と家賃方程式（の解）の関係を明らかにすることである。市場均衡では、各家計はその所得の順に品質の高いカテゴリのアパートを借りることになる。このため、市場パラメータ（家計数の変化やアパート供給量など）の変化は限界家計の

変化、従ってその所得の変化として反映される。パラメータの変化と均衡家賃の変化を関連づけるのはこのような構造であり、これは比較静学の基本定理 (2.5 節) によって表現される。

上記の賃貸住宅市場のモデルおよび比較静学理論の原典は Kaneko [4] である。Kaneko [4] は非分割財市場としての賃貸住宅市場のモデル  $(M, N)$  を定式化し、競争均衡の存在、比較静学理論および外部性を考慮したモデルの拡張等を議論した。また Kaneko-Ito-Osawa [6] (以下、Kaneko et al. [6] と略記する。) は Kaneko [4] のモデルの再定義、および比較静学理論における双対構造を明らかにすることによって理論の適用範囲を拡張した。すなわち Kaneko et al. [6] は Kaneko [4] を包摂する形となっており、本稿もこれを踏襲するものである。

Kaneko et al. [6] は経済学の二つの流れの合流点に位置づけられる。一つは、非分割財の市場についての理論で、Böhm-Bawerk [10], Neumann-Morgenstern [11], Shapley-Shubik [9], Kaneko [3] などがそれにあたる。もう一つは Ricardo [8], Alonso [1] らの地代および住宅に関する都市経済学の流れである。特に家賃方程式の論理構成は、Ricardo の限界地代論に極めて近いものである。Kaneko et al. [6] のモデル  $(M, N)$  は、理論面では賃貸住宅という財の非分割性に主眼を置きつつ、応用面では都市の賃貸住宅市場分析を指向するもので、上記の合流点とは、このことを意味する。

$(M, N)$  の比較静学理論の概要は先に述べたとおりであり、そこでは市場の主要なパラメータの変化が、限界家計の所得という一つの指標に帰着される。一方、アパートの質的变化については、これを直接反映する指標は各カテゴリのアパート効用値で、それは効用関数によって定まる。アパート効用値はアパート品質の順位づけそのものを定めるものであり、先述の比較静学理論においては、その構造上これが明示的に扱われることはない。すなわち、アパート効用値の変化は限界家計の変化とは直接関連しない。

従って、アパートの質的变化に伴う均衡家賃の変化を考察するためには、比較静学理論の基本である家賃方程式に遡って議論を始める必要がある。また、質的变化の効果と、既存の比較静学理論との関係も明確にしなければならない。

これに対して、以下のように問題を具体化して接近する。まず、アパートのカテゴリが部屋の広さと通勤時間のみからなるように単純化し、効用関数をアパート効用値の項と貨幣効用値の項からなる分離型に特定する。次にパラメータ変化として、通勤時間の短縮によるアパート効用値の増加を想定する。さらに Kaneko et al. [6] の比較静学との接続のためにいくつかの仮定を設けた上で、時間短縮が均衡家賃に与える効果について命題を導く。

この命題は、効用値が増加するカテゴリが1つのみである特殊なケースを基本として、2つ以上のカテゴリで効用値が増加する一般のケースへと拡張できる。結論を簡単に述べると、特殊・一般ケースともに、効用値が増加するカテゴリより1段階だけ上位のカテゴリにおいては均衡家賃は下落することになる。冒頭に述べた都心部での家賃の下落とは、このことである。

また、上記の命題と比較静学の基本定理を接続し、理論を系統化する。さらに、アパート効用値増加の効果と限界家計の所得増加の効果とを対比する。これにより、アパート効用値の増加と限界家計の所得増加は、均衡家賃の変化について、互いに逆方向の効果となって現れることが明らかになる。

以上が本稿の概要であり、Kaneko et al. [6] に対する追加的な貢献部分である。以下、第2節以降の構成を解説し、本節を終える。

第2節はモデルおよび比較静学の基礎理論を概説するものである。ここでは  $(M, N)$  を定義し、家計、大家および財についての諸仮定を設定した後、家賃方程式を導入する。さらに比較静学の考え方について述べ、その基本定理を示す。第2節および後述の数値例4.1節の内容は Kaneko et al. [6] に負うものであるが、説明の便宜上本文に含めた。

第3節以降が本稿の主要部分である。まず3.1節でアパート効用値の増加による比較静学を展開するための準備をする。この節の目的は効用関数の形状、限界家計の所得、カテゴリ順位の変化などについての仮定を設け、考察すべき問題を特定することである。

次に3.2節において特殊ケースについての定理を示す。また、ここで得られた結論と比較静学の基本定理との関連について述べる。

3.3節では限界家計の所得が増加した場合の効果を考察し、3.2節の結果と対比する。最後に、3.4節で3.2節の特殊ケースを一般のケースに拡張した命題を示し、第3節を終える。

第4は数値例である。まず第4.1節で、家賃方程式から均衡家賃を算出するまでの過程をJR中央線を例にとり、段階的に説明する。引き続いて第4.2節で、第3節で示した諸命題、すなわち、特殊なケース、一般のケースおよび所得増加の効果についての諸命題を、数値例によって検証する。最後に第5節で本稿のまとめと今後の課題について述べる。

## 2 賃貸住宅市場モデル

賃貸住宅市場のモデル  $(M, N)$  および競争均衡を定義する。さらに、家賃方程式およびそれに付随する限界家計、限界カテゴリなどの諸概念を定義したのち、比較静学の方法を述べる。概要は以下のようである。

まず、2.1節でモデル  $(M, N)$  の定式化とその構成要素、すなわち家計、大家および財（アパート）に関する諸仮定を述べる。アパートは非分割的であり、各家計はただか一つのアパートを賃借することを望むと仮定する。他の消費財は単一の合成財として扱われる。次に2.2節で  $(M, N)$  の競争均衡を定義する。ここでは競争均衡の存在を述べた後、比較静学の考察対象となる最大競争家賃ベクトルを定義する。

2.3節は家計の効用関数についてのいくつかの特別な仮定を述べる。これらの仮定は第2.4節で家賃方程式を定義するためになされるものである。

2.4節では、まず家賃方程式を導入するために限界カテゴリや限界家計などの諸概念を定義する。次に家賃方程式を導入し、その解は最大競争家賃ベクトルであること、家賃方程式は均衡の必要条件であることなどを述べる。

2.5節では  $(M, N)$  の比較静学について概説する。ここでは、市場のパラメータ変化は限界家計の所得に集約されること、従って限界家計の所得は市場構造の変化を反映する指標であることなどを述べる。さらに、 $(M, N)$  のこの性質を比較静学に適用するための基本定理を示す。なお、本節は既存理論の概説であるので、命題の証明は省略している。

## 2.1 モデルの構造および一般的な諸仮定

賃貸住宅市場を記号  $(M, N)$  で表す。ここで、 $M$  は家計の集合  $M = \{1, \dots, m\}$ ,  $N$  は大家の集合  $N = \{1', \dots, n'\}$  である。各家計  $i \in M$  は 1 単位のアパートを賃借しようとしているとする。各大家  $j \in N$  は何個かのアパートを所有しており、それらの一部（または全部）を市場に供給する。

これらのアパートは  $T \geq 2$  個のカテゴリに分類される。カテゴリとは、住宅サービスとしてのアパートの品質の違いを規定する概念であり、例えば部屋数が比較的多いアパートと少ないアパートは互いに異なるカテゴリに属するものであるとする。具体的なカテゴリの例は後に第 4.1 節で詳述する。

アパート以外の消費財は分割可能な合成財として扱う。そこで消費集合を  $X := \{0, e^1, \dots, e^T\} \times \mathbf{R}_+$  とし、各家計  $i \in M$  はあるアパートと消費財の組  $(e^k, c) \in X$  を選択するものとする。 $\mathbf{R}_+$  は非負の実数全体の集合である。ここで、 $k = 1, \dots, T$  はそのアパートが属するカテゴリ番号で、 $e^k$  は  $k$  番目の要素が 1、他は 0 の  $T$  次元単位ベクトルであり、第  $k$  カテゴリのアパート 1 単位を表す。なおベクトル  $0$  は、家計がこの市場  $(M, N)$  ではアパートを賃借しないことを意味する。また  $c$  は合成財の消費量で、 $i \in M$  の所得を  $I_i > 0$ , カテゴリ  $k$  のアパートの賃貸料を  $p_k$  とすると、 $c = I_i - p_k$  である。以後、 $c$  を貨幣と呼ぶことにする。

次に各家計の効用関数  $u_i : X \rightarrow \mathbf{R}$  を定義する。 $u_i$  は以下の仮定を満たすものとする。

**仮定 A (連続性および単調性)** 各  $i \in M$  および各  $x \in \{0, e^1, \dots, e^T\}$  について、 $u_i(x, c)$  は  $c$  に関して連続かつ単調な関数である。さらに、各カテゴリ  $k = 1, \dots, T$  について  $u_i(0, I_i) > u_i(e^k, 0)$  であるとする。

仮定 A が意味することは、いかなる品質のアパートに対しても、所得のすべてをその賃料に費やす家計はいないというものである。

大家の集合  $N = \{1', \dots, n'\}$  はカテゴリによって  $N = N_1 \cup \dots \cup N_T$  と直和分割される。各  $j \in N_k$  はカテゴリ  $k$  のアパートだけを何単位か市場に供給する。また、 $j \in N$  の費用関数  $C_j : \mathbf{Z}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$  について以下のように仮定する。ここで、 $\mathbf{Z}_+$  は非負の整数全体の集合を表す。

**仮定 B (費用関数の凸性)** 各  $j \in N_k$  ( $k = 1, \dots, T$ ) について、すべての  $y_j \in \mathbf{Z}_+$  に対し  $C_j(y_j + 1) - C_j(y_j) \leq C_j(y_j + 2) - C_j(y_j + 1)$  であるとする。ただし、 $C_j(0) = 0$  かつ  $C_j(1) > 0$  である。

$C_j(y_j + 1) - C_j(y_j) \leq C_j(y_j + 2) - C_j(y_j + 1)$  が費用関数の凸性を意味する。 $C_j(y_j)$  は  $y_j$  単位の（第  $k$  カテゴリに属する）アパートを供給するときの費用<sup>1</sup>である。従って  $C_j(0) = 0$  はアパートを供給しないとき、固定費用は発生しないことを意味する。

<sup>1</sup>  $(M, N)$  のアパートはすべて既設の物件であるとする。 $C_j(y_j)$  は  $y_j$  単位のアパートに対する大家の評価値（留保価格）であると解釈してよい。

## 2.2 競争均衡

前節の諸仮定の下に賃貸住宅市場  $(M, N)$  の競争均衡を定義する。

**定義 1 (競争均衡)**  $p \in \mathbf{R}_+^T$ ,  $x \in \{0, e^1, \dots, e^T\}^m$  および  $y \in \mathbf{Z}_+^n$  の組  $(p, x, y)$  が競争均衡であるとは、 $(p, x, y) = ((p_1, \dots, p_T), (x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n))$  について以下の 3 条件が満たされることである。

**予算制約下での効用最大化：**

(1)：すべての  $i \in M$  について  $I_i - px_i \geq 0$  である。ここで、 $px_i = \sum_{k=1}^T p_k x_{ik}$  であり、 $x_{ik}$  は  $x_i$  の第  $k$  成分を表す。( $i = 1, \dots, m$ .)

(2)： $I_i - px_i \geq 0$  なるすべての  $x'_i \in \{0, e^1, \dots, e^T\}$  に対して  $u_i(x_i, I_i - px_i) \geq u_i(x'_i, I_i - px'_i)$  である。

**利潤最大化：**すべての  $j \in N_k$  およびカテゴリ  $k = 1, \dots, T$  について、任意の  $y'_j \in \mathbf{Z}_+$  に対し  $p_k y_j - C_j(y_j) \geq p_k y'_j - C_j(y'_j)$  である。

**需要と供給の一致：** $\sum_{i \in M} x_i = \sum_{k=1}^T \sum_{j \in N_k} y_j e^k$  である。

Kaneko [3] あるいは Kaneko-Yamamoto [5] は一般的な非分割財市場モデルについて競争均衡の存在定理を導いた。本稿の賃貸住宅市場のモデル  $(M, N)$  はそのような非分割財市場モデルの一つに位置づけられるので、その結果を援用する。すなわち、以下が成り立つ。

**定理 1 (競争均衡の存在)** 賃貸住宅市場  $(M, N)$  には競争均衡が存在する。

競争均衡  $(p, x, y)$  の  $p$  を競争家賃ベクトルと呼ぶことにする。さらに、後述の比較静学分析のため、 $(M, N)$  の競争家賃ベクトル全体の集合に対して最大競争家賃ベクトルを以下のように定義する。

**定義 2 (最大競争家賃ベクトル)**  $(p, x, y)$  を競争均衡とする。競争家賃ベクトル  $p$  が  $(M, N)$  の最大競争家賃ベクトルであるとは、任意の競争均衡家賃ベクトル  $p'$  に対して  $p \geq p'$  であることをいう。

最大競争家賃ベクトルは存在すれば、一意である。一般の市場モデルでは、最大価格ベクトルの存在は必ずしも保証されないが、賃貸住宅市場モデル  $(M, N)$  については Kaneko [4] および Miyake [7] で最大競争家賃ベクトルの存在定理が示されている。従って、以下が成り立つ。

**定理 2 (最大競争家賃ベクトルの存在)** 賃貸住宅市場  $(M, N)$  には最大競争家賃ベクトルが存在する。

定理 2 の証明は Kaneko et al. [6] の付録を参照。

### 2.3 効用関数についての具体的な諸仮定

仮定 A は効用関数の一般的な性質を述べたものであった。本節では後述の家賃方程式および比較静学の準備として、家計の効用関数に対していくつかの具体的な仮定を追加し、それらについて説明する。なお、以下では家計  $M = \{1, \dots, m\}$  は所得  $I_i$  の順に並び替えられているものとして扱う。すなわち、一般性を失うことなく、所得の順位は

$$I_1 \geq I_2 \geq \dots \geq I_m \quad (1)$$

であると仮定する。

**仮定 C (効用関数の同一性)** すべての  $i, i' \in M$  について  $u_i(\cdot, \cdot) = u_{i'}(\cdot, \cdot)$  である。

すなわち、すべての家計は同一の効用関数をもつと仮定する。以下では  $u_i(\mathbf{x}_i, c)$  を  $u(\mathbf{x}_i, c)$  と表記する。仮定 C は実質的な制約を加えるものである。しかし、この仮定によって議論の焦点が絞られ、後の比較静学の理論展開が簡単かつ本質的なものとなる。また、この仮定を加えても、各家計の消費行動は異なったものとなり得ることに注意すべきである。というのは、各家計の所得  $I_i$  は依然として異なるので、賃貸住宅が正常財であるという仮定（すぐ後の仮定 E）により  $i \in M$  のアパート選択は  $i' \in M$  のそれとは異なったものになる可能性があるからである。

**仮定 D (代替性)**  $u(\mathbf{x}_i, c) > u(\mathbf{x}'_i, c')$  であるとする。このとき、ある  $\delta > 0$  が存在して  $u(\mathbf{x}_i, c) = u(\mathbf{x}'_i, c' + \delta)$  である。

**仮定 E (正常財)**  $u(\mathbf{x}_i, c) = u(\mathbf{x}'_i, c')$  かつ  $c < c'$  とする。このとき、任意の  $\delta > 0$  について  $u(\mathbf{x}_i, c + \delta) > u(\mathbf{x}'_i, c' + \delta)$  である。

仮定 D はアパートのカテゴリの違い、すなわち品質の差は貨幣量の差で代替し得ることを意味する。

一方、仮定 E の内容は以下のようなものである。 $u(\mathbf{x}_i, c) = u(\mathbf{x}'_i, c')$  かつ  $c < c'$  であるとは、小さい貨幣量  $c$  でアパート  $\mathbf{x}_i$  を借りる消費と、大きい貨幣量  $c'$  でアパート  $\mathbf{x}'_i$  を借りる消費が無差別であるということなので、このことは  $\mathbf{x}_i$  が  $\mathbf{x}'_i$  に比べて「より良い」アパートであることと解釈することができる。このとき、 $\delta > 0$  なる貨幣量の増加を家計に与えれば、家計はより良いアパートのほうを選好する。

逆に仮定 D と仮定 E から、 $u(\mathbf{x}_i, c) = u(\mathbf{x}'_i, c')$  かつ  $c < c'$  ならば、任意の  $\delta > 0$  について  $u(\mathbf{x}_i, c - \delta) < u(\mathbf{x}'_i, c' - \delta)$  であることを示すことができる。言い換えると仮定 E はアパート（の品質）は正常財であることを意味するものである。

次に、各カテゴリのアパートの品質の差を明確に定義するため、以下の仮定をおく。

**仮定 F (アパートの品質)**  $u(\mathbf{e}^1, 0) > u(\mathbf{e}^2, 0) > \dots > u(\mathbf{e}^T, 0)$  である。



仮定 F により、消費  $(e^1, 0), u(e^2, 0), \dots, (e^1, 0)$  の間で無差別なものはない。さらに、仮定 D, E および F から、任意の貨幣量  $c \geq 0$  に対して  $u(e^1, c) > u(e^2, c) > \dots > u(e^T, c)$  であることを示すことができる。

**例 1 (効用関数の典型例)** 仮定 A, D, E, F を満たす効用関数の例として

$$u(x_i, c) = \begin{cases} h_k + g(c) & (x_i = e^k), \\ g(c) & (x_i = 0) \end{cases} \quad (2)$$

の形のものが考えられる。ここで、 $h_k$  は  $h_k > h_{k+1}$ ,  $(k = 1, \dots, T-1)$  を満たす実数で、アパートからの効用値である。 $g$  は貨幣の消費  $c$  からの効用値を与える。 $g$  は  $c$  に関して狭義単調増加かつ狭義に凹であるとする。また、 $\lim_{c \rightarrow +\infty} g(c) = +\infty$  とする。

## 2.4 家賃方程式

前節で  $(M, N)$  の最大競争家賃ベクトル  $p$  を定義した。家賃方程式はこの  $p$  について成立する連立方程式体系で、家計のアパート選好とアパートの家賃（カテゴリごとに定まる均衡家賃）の関係から導かれるものである。

市場の構造に関する適当な条件の下で、家賃方程式は最大競争均衡の必要条件として成立する。また、実際に家賃方程式を解くことによって着目する市場の最大競争家賃ベクトルを知ることができる。この意味で、家賃方程式の解を求めることが比較静学の分析手法となるのである。以下では、まず家賃方程式を導入するために必要な補題、諸概念の定義および仮定を示す。その後、家賃方程式を導入し、家賃方程式と最大競争家賃ベクトルの関係を述べる。

### 2.4.1 諸概念の定義

$(M, N)$  の任意の競争均衡について以下が成り立つ。

**補題 1**  $(p, x, y)$  を  $(M, N)$  の任意の競争均衡とする。このとき、

1.  $x_i = e^k$  かつ  $k' < k$  ならば  $p_{k'} > p_k$  である。
2.  $x_i = e^k$ ,  $x_{i'} = e^{k'}$  かつ  $I_i > I_{i'}$  ならば  $k \leq k'$  である。

証明は Kaneko et al. [6] を参照。補題 1 より、競争均衡においては、より良いアパートにはより高い家賃がつき、所得が大きい家計は低所得の家計と同等かそれ以上のアパートを賃借することがわかる。さらに、次の仮定をおく。

**仮定 G** 任意の最大競争均衡  $(p, x, y)$  について以下が成り立つとする。

$$k = 1, \dots, f \text{ について } \sum_{j \in N_k} y_j > 0, \quad k = f+1, \dots, T \text{ について } \sum_{j \in N_k} y_j = 0.$$

**定義 3 (限界カテゴリ)** 仮定 G の  $f$  ( $1 \leq f \leq T$ ) を限界カテゴリとよぶ。

仮定 G により、限界カテゴリ  $f$  以下の番号のカテゴリのみが市場として有効となる。これと補題 1 よりカテゴリ  $k = 1, \dots, f$  の最大競争家賃について、 $p_1 > p_2 > \dots > p_f$  である。また、仮定 F と補題 1 より、均衡での家計のアパート選択は所得の順になされ则认为てよい。すなわち、均衡では所得が大きい家計群が最も品質の良いカテゴリ 1 のアパートを賃借し、次に所得が大きい家計群が次に品質の良いカテゴリ 2 のアパートを賃借する。これに基づいて、以下の概念を定義する。

**定義 4 (限界家計)**  $(p, x, y)$  を競争均衡とする。関数  $G$  を

$$G(k) = \sum_{t=1}^k \sum_{j \in N_t} y_j, \quad (k = 1, \dots, T) \quad (3)$$

によって定義し、この  $G(k)$  を第  $k$  カテゴリの**限界家計**と呼ぶ。

限界家計  $G(k)$  は単に家計の番号であるだけでなく、第  $k$  カテゴリまでのアパートの累積数でもあり、各カテゴリのアパートを賃借する家計グループのうち最も所得が小さい家計がこれによって特定される。(1) より  $I_{G(1)} \geq I_{G(2)} \geq \dots \geq I_{G(f)}$  であることに注意する。

#### 2.4.2 家賃方程式

次の方程式体系 (4) を家賃方程式とよぶ。

$$\left. \begin{aligned} u(e^{f-1}, I_{G(f-1)} - p_{f-1}) &= u(e^f, I_{G(f-1)} - p_f), \\ u(e^{f-2}, I_{G(f-2)} - p_{f-2}) &= u(e^{f-1}, I_{G(f-2)} - p_{f-1}), \\ &\vdots \\ u(e^1, I_{G(1)} - p_1) &= u(e^2, I_{G(1)} - p_2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) の意味は以下のようなものである。第 1 式の  $p_{f-1}$  は、限界家計  $G_{(f-1)}$  が  $f$  番目のアパートを  $p_f$  で借りることができる、彼が  $f-1$  番目のカテゴリのアパートに支払う最大の賃貸料である。同様に、第 2 式の  $p_{f-2}$  は、限界家計  $G_{(f-2)}$  が  $f-1$  番目のアパートを  $p_{f-1}$  で借りることができる、彼が  $f-2$  番目のアパートに支払う最大の賃貸料である。このように、 $p_{f-1}, \dots, p_1$  の値は帰納的に定義されていく。

すなわち、カテゴリ  $f$  の賃料  $p_f$  を所与とすると、その他のカテゴリの均衡家賃が (4) より一意に定められる。このような価格決定の理論は Ricardo[8] の差額地代論にその源流を求めることができる。すなわち、限界家計  $G(f-1)$  は価格  $p_{f-1}$  および  $p_f$  の下でカテゴリ  $f-1$  と  $f$  について無差別であるが、 $f-1$  のほうが  $f$  よりも良いアパートのカテゴリであり、その品質格差が  $p_{f-1}$  と  $p_f$  に反映されるのである。なお、最大競争家賃ベクトルが家賃方程式 (4) を満たすための必要条件は以下の定理で与えられる。

**定理 3 (家賃方程式の条件)**  $(p, x, y)$  を最大競争均衡とする。このとき、各カテゴリ  $k = 1, \dots, f-1$  について  $I_{G(k)} = I_{G(k+1)}$  ならば、 $(p, x, y)$  について家賃方程式 (4) が成立する。

証明は Kaneko et al. [6] を参照。条件  $I_{G(k)} = I_{G(k)+1}$  は、家計の数  $m$  がカテゴリ数  $T$  に比べて十分に大きい大規模都市においては、少なくとも近似的に成立すると考えられる。以下では次の仮定の下に議論をすすめる。

**仮定 H** 賃貸住宅市場  $(M, N)$  の各カテゴリ  $k = 1, \dots, f-1$  について  $I_{G(k)} = I_{G(k)+1}$  である。

なお、本節で述べたこと具体例を第 4.1 節の数値例で詳述する。

## 2.5 比較静学の概説

本節では Kaneko et al. [6] の比較静学の基礎理論の概要を述べる。本節以降、「最大競争家賃」を単に「競争家賃」と省略して呼ぶことにする。

比較静学の考察対象は、賃貸住宅市場の構造変化によって生じる競争家賃の変化である。構造変化とは、具体的には次のような市場パラメータの変化によるもので、構造変化後の市場の諸量を<sup>^</sup>つきの記号で表すことにすると、

1. 家計  $M = \{1, \dots, m\}$  の  $\hat{M} = \{\hat{1}, \dots, \hat{m}\}$  への変化、あるいは大家  $N = \{1, \dots, n\}$  の  $\hat{N} = \{\hat{1}, \dots, \hat{n}\}$  への変化。
2. 所得  $I_1, \dots, I_m$  の  $\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_{\hat{m}}$  への変化。(所得分布自体の変化、あるいは  $M$  から  $\hat{M}$  への変化に伴う変化など。)
3. 限界カテゴリ  $f$  の  $\hat{f}$  への変化。

などがその基本的なものである。ただし、A から H までの諸仮定は  $(M, N)$  と  $(\hat{M}, \hat{N})$  の両方において成立するものとする。

上記のパラメータ変化は限界家計  $G(k)$  の変化、従って  $I_{G(k)}$ ,  $(k = 1, \dots, T)$  の変化をもたらす。家賃方程式 (4) は均衡の必要条件であり、それは競争家賃  $p$  と  $I_{G(k)}$ ,  $(k = 1, \dots, f-1)$  で構成される。従って市場  $(M, N)$  と  $(\hat{M}, \hat{N})$  における家賃方程式と  $I_{G(k)}$ ,  $\hat{I}_{\hat{G}(k)}$  の関係から、競争家賃ベクトルとパラメータの関係を導くことができる。すなわち、 $I_{G(k)}$  から  $\hat{I}_{\hat{G}(k)}$  への変化をパラメータ変化の指標として捉え、これにともなう  $p$  から  $\hat{p}$  への変化を考察するというのが Kaneko et al. [6] の比較静学理論の概要である。次の定理はその基礎を与えるものである。

**定理 4 (比較静学の基本定理)**  $p$  および  $\hat{p}$  をそれぞれ市場  $(M, N)$  および  $(\hat{M}, \hat{N})$  の競争家賃とする。 $k$  を  $1 \leq k \leq \min(f, \hat{f}) - 1$  なるカテゴリとする。このとき、 $\hat{p}_k - p_k \leq \hat{p}_{k+1} - p_{k+1}$  であるための必要十分条件は  $\hat{I}_{\hat{G}(k)} - I_{G(k)} \leq \hat{p}_k - p_k$  である。

定理 4 は、効用関数とアパートのカテゴリはパラメータの変化前後で不変という仮定の下に導かれる。定理 4 により、隣り合うカテゴリ間の競争家賃の差の比較が  $\hat{I}_{\hat{G}(k)} - I_{G(k)}$  と競争家賃の差の比較に変換される。

表 2: 時間短縮後のアパート効用値

所要時間 (分) と駅名	広さ (m <sup>2</sup> )							
	<25		26-45		46-65		66-85	
18: 中野	15	19.2	10	95.2	5	171.2	1	247.2
29: 吉祥寺	17	-3.9	12	72.1	7	148.1	2	224.1
42: 国分寺	18	-31.2	13	44.8	8	120.8	3	196.8
45: 立川	19	-37.5	14	38.5	9	114.5	4	190.5
60: 八王子	20	-69.0	16	7.0	11	83.0	6	159.0

凡例

$k$	$h_k$
-----	-------

### 3 アパート効用値の変化と家賃の比較静学

前節で述べた比較静学理論では、市場構造の変化を限界家計の所得  $I_{G(k)}$  へ集約させるという方法をとる。このため、市場構造の変化と家賃ベクトルの直接的な関係が必ずしも明らかにならない場合がある。その典型例は、次のような問題である。

**問題 1** 路線上的ある区間で、通勤時間 (距離) が短縮されたとする。通勤時間の短縮前後で、最大競争家賃はどのように変化するか。

問題 1 のような時間短縮が生じたとき、その区間に係わるカテゴリではアパート効用値が増加する。このことを第 1 節に示したカテゴリ表に基づいて例示する。時間短縮前のアパート効用値が表 1 のようであるとする。これに対して、例えば国分寺ー立川間の通勤経路が改善 (快速電車が新しく運行されるなど) され、従来 49-42=7 分間であった時間が 3 分間に短縮したという変化を考える。より都心 (東京) に近い、すなわち通勤時間が短いカテゴリほどアパート効用値は高いのであるから、時間短縮後において表 1 の立川駅の行のアパート効用値は増加する。表 2 はこの変化の一例<sup>2</sup>である。ただし、家計の効用関数是不変で、八王子駅までの通勤時間は短縮の影響を受けないものと仮定する。(これらの仮定については次節で詳しく述べる。) この変化前後で、競争家賃を比較するというのが問題 1 の具体的な内容である。

アパート効用値の変化は上記のような通勤時間の短縮だけでなく、改装などの質的变化、あるいは周辺での騒音発生などの環境変化によっても生じる。このようにアパートの質的变化は実際の市場の問題と密接に関連する。しかし、アパートの効用値そのものの変化は 2.5 節に挙げた代表的パラメータとは異なるものであるので、定理 4 とは異なる接近法が必要となる。

<sup>2</sup>表 1, 2 のアパート効用値は  $U(s, t, c) = 3.8s - 2.1t + 300\sqrt{c/10}$  なる効用関数に基づいて定めたものである。ここで、 $s, t$  はそれぞれ部屋の広さと通勤時間を表す変数で、 $3.8s - 2.1t$  がこの場合のアパート効用値となる。 $300\sqrt{c/10}$  は貨幣  $c$  からの効用値である。(詳しくは第 4.1 節で述べる。)

この例の場合、通勤時間の短縮は立川駅のすべてのカテゴリでアパート効用値を同じだけ増加させるが、以下の議論ではこのことを必ずしも要請しない。すなわち、効用値の増加量はカテゴリごとに異なっても構わない。

### 3.1 問題の特定化と諸仮定

以下では特にことわらない限り、アパートのカテゴリは通勤時間と部屋の広さによって定まるものとする。また、以下では一般的なカテゴリを記号  $t$  で表記し、記号  $k$  は特定のカテゴリを表すものとする。この前提の下に、本節では問題 1 を取り扱うための具体的な仮定を設定する。

**仮定 1** 効用関数  $u: X \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$u(e^t, c) = h_t + g(c) \quad (5)$$

とする。ここで、 $h_t, (t = 1, \dots, f)$ ,  $g$  は例 1 で述べたとおり。

(5) の重要な性質はアパート効用値  $h_t$  と貨幣消費の効用値  $g(c)$  が線形に分離されていること、および貨幣項  $g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$  が狭義単調増加かつ凹であることで、後述の諸命題はこれらの性質に基づいて導かれる。

仮定 1 は効用関数のクラスを限定するという意味で制約的であるが、これにより数学的な取り扱いが容易になり、問題 1 に対して実質的な解答を得ることができる。また、このような技術的な理由の他に (5) の型の効用関数に基づく競争家賃の計算値は実際の市場価格の近似値<sup>3</sup>となっているという理由からもこの型を用いることにする。

**仮定 2** パラメータの変化前後で限界カテゴリは不変、すなわち  $f = \hat{f}$  である。

**仮定 3** 限界家計の所得はパラメータの変化前後で不変、すなわち、 $\hat{I}_{G(t)} = I_{G(t)}, (t = 1, \dots, f)$  であるとする。また、 $I_{G(1)} > I_{G(2)} > \dots > I_{G(f-1)} > I_{G(f)}$  であるとする。

仮定 2 および仮定 3 の最初の条件  $\hat{I}_{G(t)} = I_{G(t)}, (t = 1, \dots, f-1)$  は、家賃方程式の与件を一定に保ってアパート効用値増加の効果のみを取り出すためのものである。仮定 3 の二つめの条件は単に命題の結論を狭義不等号  $>$  で表すためのものである。

**仮定 4**  $h_t$  の増加によってカテゴリの順位づけは変化しない。

表 3 は仮定 4 の内容をカテゴリ表を用いて表現したものである。表 3 の各セルは効用値とカテゴリ番号からなる。表 3 の左側は時間短縮が生じる前、右側は都心から駅  $l$  までの所要時間が  $d_l$  から  $\hat{d}_l (< d_l)$  へ変化した後の表である。

所要時間の短縮により、駅  $l$  の欄のすべてのカテゴリで  $h_t$  が増加する。仮定 4 は、この増加によってカテゴリの順位付けが変化することはない、表 3 の左右で同じカテゴリには同じカテゴリ番号（順位）が付くことを意味する。これは、各市場の競争家賃の比較対象を明確にしておくためである。

表 3 ではアパート効用値の増加が生じるカテゴリは  $l$  個で、これらのカテゴリ番号の関係は  $k_1 < \dots < k_l$  であった。一般には連続したカテゴリ番号でアパート効用値の増加が生じる場

<sup>3</sup> 計算値と市場価格の近似については Kaneko et. al [6] を参照。

表 3: アパート効用値の変化

通勤時間と駅名	広さ					
	$s_0$		...		$s_1$	
$d_1$ : 駅 1	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$h_1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$d_l$ : 駅 $l$	$h_{k_l}$	$k_l$	$\ddots$	$\ddots$	$h_{k_l}$	$k_l$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$d_L$ : 駅 $L$	$h_L$	$f$	$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$

 $\Rightarrow$ 

通勤時間と駅名	広さ					
	$s_0$		...		$s_1$	
$d_1$ : 駅 1	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$h_1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$\hat{d}_l$ : 駅 $l$	$\hat{h}_{k_l}$	$k_l$	$\ddots$	$\ddots$	$\hat{h}_{k_l}$	$k_l$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
$d_L$ : 駅 $L$	$h_L$	$f$	$\ddots$	$\ddots$		$\vdots$

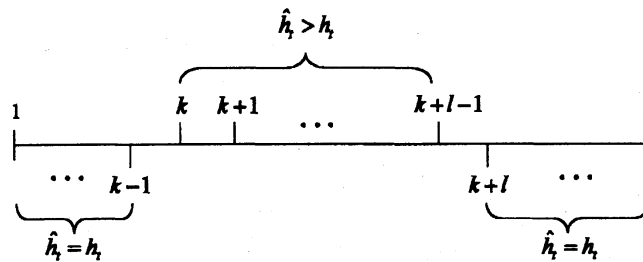


図 1: 基本的な想定

合も考えられる。これを考慮してアパート効用値の増加を一般的に表現したものが図1である。図1では直線上にカテゴリの番号を1から $f$ まで配置している。通勤時間の短縮によって効用値が増加するのは $t = k, \dots, k+l-1$  ( $1 \leq k \leq f-l$ ,  $l \geq 1$ ) の $l$ 個のカテゴリであるとし、上向きを目盛りでそれらのカテゴリを表す。

### 3.2 特殊なケース

問題1に関する命題を導く前段階として、本節ではアパート効用値の増加が生じるカテゴリが1箇所のみの特殊な場合を考察する。これは図1で $l=1$ の場合に相当し、アパート効用値が増加するカテゴリは $k$ のみである。このような変化を通勤時間短縮の問題として扱うことはできないが、ここでは図1の一般的な設定からいったん離れて、アパート効用値の増加が競争家賃へ与える影響の基本構造を明らかにすることだけを目的とする<sup>4</sup>。

この特殊なケースについて、次の定理5が成り立つ。定理5は4つの命題からなる。命題 i), ii), iii) はパラメータ変化前後の家賃変化について述べたものであるが、最も重要な命題は iii) であり、これは上位（したがって大雑把に言えば都心部）のカテゴリでは交通体系の改善後に家賃が下落することを示唆するものである。また、命題 iii) は後に  $2 \leq l$  の一般のケースに

<sup>4</sup>具体的な事例としては、あるカテゴリは一戸の集合住宅であり、改装などによって、その建物全体の住環境が向上した、といった場合を考えればよい。

についての命題を導くための補題ともなる。iv) は iii) の家賃の下落幅についての命題で、定理 4 と本定理の関係を示すものである。

**定理 5** 仮定 1-4 の下で、以下が成り立つ。

- i). すべての  $t = k+1, \dots, f-1$  について  $\hat{p}_t = p_t$ .
- ii).  $\hat{p}_k > p_k$ .
- iii). すべての  $t = 1, \dots, k-1$  について  $\hat{p}_t < p_t$ .
- iv). すべての  $t = 1, \dots, k-2$  について  $\hat{p}_{t+1} - p_{t+1} < \hat{p}_t - p_t < 0$ .

証明.

i). 市場  $(M, N)$  および  $(\hat{M}, \hat{N})$  における家賃方程式をそれぞれ構成し、対応するカテゴリ同士の方程式の差をとることにより、 $k+1 \leq t \leq f-1$  なる  $t$  について

$$g(I_{G(t)} - p_t) - g(I_{G(t)} - \hat{p}_t) = g(I_{G(t)} - p_{t+1}) - g(I_{G(t)} - \hat{p}_{t+1}) \quad (6)$$

を得る。仮定 2 より  $p_f = \hat{p}_f$  であるから、(6) を繰り返し適用して  $\hat{p}_{f-1} = p_{f-1}, \dots, \hat{p}_{k+1} = p_{k+1}$  を得る。

ii). i) と同様に両市場の家賃方程式を構成し、 $t = k$  での方程式の差をとることにより、

$$g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k) = g(I_{G(k)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k)} - p_{k+1}) + (h_k - \hat{h}_k)$$

を得る。i) より  $\hat{p}_{k+1} = p_{k+1}$  であるから  $g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k) = (h_k - \hat{h}_k) < 0$  となり  $\hat{p}_k > p_k$  を得る。

iii). 命題を示すには  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  であることが分れば十分である。実際、 $1 \leq t \leq k-2$  なる  $t$  については、パラメータ変化前後の家賃方程式で、対応するカテゴリ同士で差をとることにより、

$$g(I_{G(t)} - p_t) - g(I_{G(t)} - \hat{p}_t) = g(I_{G(t)} - p_{t+1}) - g(I_{G(t)} - \hat{p}_{t+1}) \quad (7)$$

なる関係を得る。従って  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  であることが示されれば、(7) から  $\hat{p}_{k-2} < p_{k-2}, \dots, \hat{p}_1 < p_1$  が順次得られる。以下では  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  であることを示す。 $t = k-1$  において対応するカテゴリ同士の家賃方程式の差をとることにより、

$$\begin{aligned} & g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) \\ &= \{g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k)\} + \hat{h}_k - h_k. \end{aligned} \quad (8)$$

さらに  $t = k$  において家賃方程式の差をとることにより

$$\begin{aligned} \hat{h}_k - h_k &= \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k)} - p_{k+1})\} \\ &\quad - \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k)\} + \hat{h}_{k+1} - h_{k+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

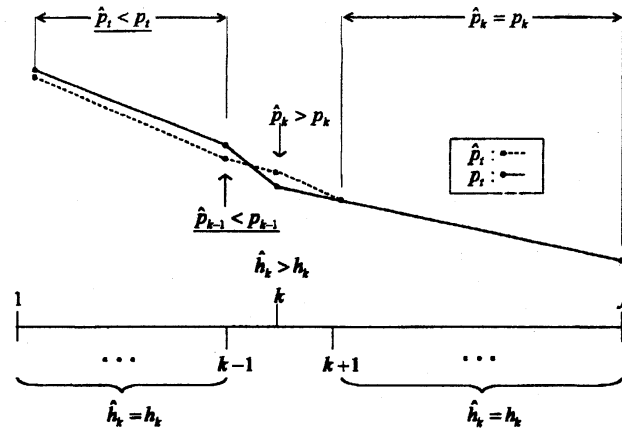


図 2: ひとつのカテゴリのみで効用値が増加

を得る。(9) を (8) に代入して変形すると

$$\begin{aligned} & g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) \\ &= \{g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k)\} - \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k)\} \\ &+ \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k)} - p_{k+1})\} + \hat{h}_{k+1} - h_{k+1} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。(10) において仮定および i), ii) より  $\hat{h}_{k+1} = h_{k+1}$ ,  $\hat{p}_{k+1} = p_{k+1}$  かつ  $\hat{p}_k > p_k$  である。ここで  $g$  が凹関数であることに注意すると

$$\begin{aligned} & g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) \\ &= \{g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k)\} - \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k)\} > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

であることが分かる。以上より  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  を得る。

iv).  $t = 1$  とする。仮定および iii) より  $0 = \hat{I}_{G(1)} - I_{G(1)} > \hat{p}_1 - p_1$  である。定理 4 を適用して  $\hat{p}_2 - p_2 < \hat{p}_1 - p_1 < 0$  である。同様の議論を  $t = 2, \dots, k-2$  について繰り返し結論を得る。□

定理 5 の内容を模式的に表すと図 2 のようになる。なお、命題 i), ii) は  $2 \leq l$  の一般のケースについても成り立つ。すなわち、仮定 1-4 の下で、i'). すべての  $t = k+l, \dots, f-1$  について  $\hat{p}_t = p_t$ , ii').  $\hat{p}_{k+l-1} > p_{k+l-1}$  である。

命題 iii) は次のように解釈できる。(11) はパラメータ変化前後における限界家計  $G(k-1)$  のカテゴリ  $k-1$  への「付け値」の変化と、カテゴリ  $k$  の家賃変化の関係を表したものである。カテゴリ  $k$  の家賃は  $p_k$  から  $\hat{p}_k$  へ増加するので、この家賃上昇によって家計  $G(k-1)$  も  $G(k)$  も不効用を被る。(11) の右辺はこの不効用の差で、これは正である。なぜならば、貨幣の限界効用が逓減するので、より所得の大きい家計  $G(k-1)$  にとっての不効用は家計  $G(k)$  にとってのそれよりも小さいからである。



### 3.3 効用値変化の効果と所得変化の効果

定理5はアパートの効用値が増加することの基本的な効果を示したものであるが、これに対して、所得の増加は定理5の結論とは逆の効果を競争家賃に与える。次の定理6はこのことを述べたもので、そのうち命題 iii), iv) が定理5とは対をなす結果を与える。

**定理6** 仮定1, 2, 4の下で、 $\hat{I}_{\hat{G}(k)} > I_{G(k)}$ ,  $\hat{I}_{\hat{G}(t)} = I_{G(t)}$ , ( $t \neq k$ ) なる変化が生じたとする。すなわちカテゴリ  $t = k$  においてのみ限界家計の所得の増加があったとする。このとき、以下が成り立つ。

- i). すべての  $t = k+1, \dots, f-1$  について  $\hat{p}_t = p_t$ .
- ii).  $\hat{p}_k > p_k$ .
- iii). すべての  $t = 1, \dots, k-1$  について  $\hat{p}_t > p_t$ .
- iv). すべての  $t = 1, \dots, k-2$  について  $0 < \hat{p}_t - p_t < \hat{p}_{t+1} - p_{t+1}$ .

証明. i) は定理5と全く同様である。iii) を示すには ii) を示せば十分である。

ii). パラメータ変化前後の家賃方程式をそれぞれ構成し、 $t = k$  において対応するカテゴリ同士の差をとることにより、

$$g(I_{G(k)} - p_{k+1}) - g(I_{G(k)} - p_k) = g(\hat{I}_{\hat{G}(k)} - \hat{p}_{k+1}) - g(\hat{I}_{\hat{G}(k)} - \hat{p}_k) \quad (12)$$

を得る。 $\hat{p}_{k+1} = p_{k+1}$  であること、(12) 式および  $g$  の凹性より

$$(I_{G(k)} - p_{k+1}) - (I_{G(k)} - p_k) < (\hat{I}_{\hat{G}(k)} - \hat{p}_{k+1}) - (\hat{I}_{\hat{G}(k)} - \hat{p}_k) \quad (13)$$

となる。すなわち  $\hat{p}_k > p_k$  である。

iv). すべての  $t = 1, \dots, k-1$  について  $\hat{I}_{\hat{G}(t)} - I_{G(t)} = 0 < \hat{p}_t - p_t$  であるから定理4より結論を得る。□

定理6の命題 ii) の結論は次のように解釈できる。パラメータ（家計  $G(k)$  の所得）の変化前後でカテゴリ  $k+1$  と  $k$  の品質格差は一定である。このことが (12) で表される。一方、 $\hat{I}_{\hat{G}(k)} > I_{G(k)}$ ,  $\hat{p}_{k+1} = p_{k+1}$  であり、貨幣の限界効用が逓減するので、家計  $\hat{G}(k)$  がカテゴリ  $k+1$  と  $k$  の品質格差に対して支払うべき代償は家計  $G(k)$  のそれよりも大きい。(13) はこのことを表している。言い換えると  $\hat{p}_k$  と  $p_k$  の差は、カテゴリ  $k+1$  ではなく  $k$  を選択することに対する  $\hat{G}(k)$  への補償と  $G(k)$  への補償の差を反映している。

図3は定理6の内容を図式化したものである。限界家計の所得が増加した場合、カテゴリ  $k$  で家賃が上昇するのは定理5と同じであるが、それより上位のカテゴリでの挙動は定理5とは逆である。端的に言えば、カテゴリ  $k$  のアパート効用値が増加した場合は  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  となり、カテゴリ  $k$  の限界家計の所得が増加した場合は  $\hat{p}_{k-1} > p_{k-1}$  となるのである。

$k-1$  におけるこの家賃挙動の違いは、カテゴリ  $k$  での家賃上昇のあり方が、アパート効用値の増加の場合と所得増加の場合とでは異なることによる。前者のアパート効用値の場合、カテゴリ  $k$  での家賃上昇は  $k$  の効用値そのものの増加によってもたらされたもので、これは

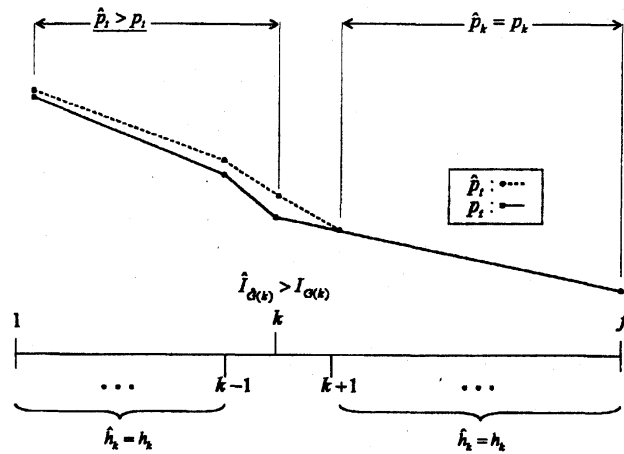


図 3: 所得増加の効果

(14) の如く家計  $G(k-1)$  によるカテゴリ  $k$  の評価にアパート効用値と価格の両方から影響を与える。

$$g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) = (\hat{h}_k - h_k) - \{g(I_{G(k-1)} - p_k) - g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k)\} \\ (\hat{h}_k - h_k) + \{g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k)\} \quad (14)$$

一方、所得増加の場合、カテゴリ  $k$  での家賃上昇は家計  $G(k)$  の所得が増加したことによるもので、 $h_k$  はパラメタの変化前後で不変であるから、家計  $G(k-1)$  によるカテゴリ  $k-1$  の評価に対しては、価格面での影響しか及ぼさない。以上のことは、カテゴリ  $k-1$  と  $k$  の家賃の関係を表した次式 (15) と (14) と対比すれば明らかであろう。

$$g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) = g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k) \quad (15)$$

なお、一般に複数の限界家計の所得が増加（あるいは減少）した場合については、Kaneko et al. [6] で扱われており、本稿ではこれ以上立ち入らないことにする。

### 3.4 一般のケース

本節では時間短縮の効果を一般的な場合について検討する。すなわち、図1のような変化が生じたとき、特殊ケースと同様に、上位のカテゴリで競争家賃が下落するという結論が一般的な場合についても成立することを導く。

このことを以下の考え方に基づいて行う。図1のように複数のカテゴリでアパート効用値の増加が生じるとき、 $\hat{p}_k > p_k$  となるか  $\hat{p}_k \leq p_k$  となるかは  $k$  より下位のカテゴリでの競争家賃の増減に依存するので、一般には定まらない。しかし、もしカテゴリ  $k$  での均衡価格の増

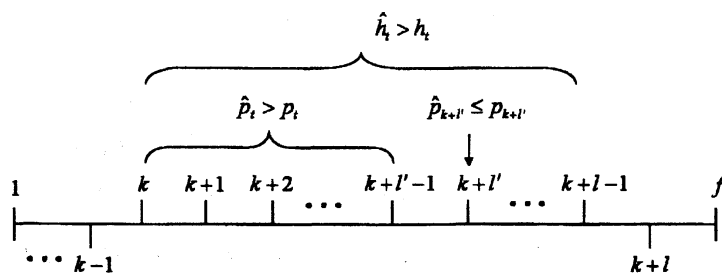


図 4: 補題 2 の仮定

減に関わらず  $k-1$  では必ず  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  となることが示されれば、それより上位のカテゴリ  $t=1, \dots, k-1$  については定理 5 の (7) 式より  $\hat{p}_t < p_t$  となる。すなわち、アパート効用値が増加するカテゴリのうち、最も上位のカテゴリである  $k$  を境にして、それより上位のカテゴリについては均衡価格が下落する、という特殊ケースも含めた一般的結論が得られる。

以下では、カテゴリ  $k$  での均衡価格の増減に関わらず  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  となることを示す。ここで、定理 5 の iii) の証明の式 (10) において  $\hat{p}_k > p_k$ ,  $\hat{p}_{k+1} \leq p_{k+1}$ ,  $\hat{h}_{k+1} \geq h_{k+1}$  ならば  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  となることに着目する。このことを一般化したものが以下の補題である。

**補題 2** 仮定 1-4 が成り立つとする。このとき、競争家賃について  $\hat{p}_t > p_t$ , ( $t = k, \dots, k+l'-1$ ,  $1 \leq l' \leq l$ ) かつ  $\hat{p}_{k+l'} \leq p_{k+l'}$  ならば  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  である。

証明. 仮定の内容を図式化すると図 4 のようになる。まず  $l' = 2$  とする。 $t = k-1$  において家賃方程式の差をとることにより、

$$\begin{aligned} & g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) \\ &= \{g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k)\} + \hat{h}_k - h_k. \end{aligned} \quad (16)$$

$t = k$  および  $t = k+1$  において家賃方程式の差をとることにより

$$\left. \begin{aligned} \hat{h}_k - h_k &= \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k)} - p_{k+1})\} \\ &\quad - \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k)\} + \hat{h}_{k+1} - h_{k+1}, \\ \hat{h}_{k+1} - h_{k+1} &= \{g(I_{G(k+1)} - \hat{p}_{k+2}) - g(I_{G(k+1)} - p_{k+2})\} \\ &\quad - \{g(I_{G(k+1)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k+1)} - p_{k+1})\} + \hat{h}_{k+2} - h_{k+2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

を得る。(16) と (17) から

$$\begin{aligned} & g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) \\ &= \{g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k)\} - \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k)\} \\ &\quad + \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k)} - p_{k+1})\} - \{g(I_{G(k+1)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k+1)} - p_{k+1})\} \\ &\quad + \{g(I_{G(k+1)} - \hat{p}_{k+2}) - g(I_{G(k+1)} - p_{k+2})\} + \hat{h}_{k+2} - h_{k+2}. \end{aligned} \quad (18)$$

仮定より  $\hat{p}_k > p_k$ ,  $\hat{p}_{k+1} > p_{k+1}$  かつ  $\hat{p}_{k+2} \leq p_{k+2}$  であるから (18) の右辺の各項は、

$$\begin{aligned} & \{g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k)\} - \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k)} - p_k)\} > 0, \\ & \{g(I_{G(k)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k)} - p_{k+1})\} - \{g(I_{G(k+1)} - \hat{p}_{k+1}) - g(I_{G(k+1)} - p_{k+1})\} > 0, \\ & g(I_{G(k+1)} - \hat{p}_{k+2}) - g(I_{G(k+1)} - p_{k+2}) + \hat{h}_{k+2} - h_{k+2} > 0 \end{aligned}$$

となる。よって  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  である。一般に  $l' \geq 2$  のとき、(18) に対応する方程式は

$$\begin{aligned} & g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) \\ &= \sum_{s=0}^{l'-1} \{g(I_{G(k+s-1)} - \hat{p}_{k+s}) - g(I_{G(k+s-1)} - p_{k+s})\} - \{g(I_{G(k+s)} - \hat{p}_{k+s}) - g(I_{G(k+s)} - p_{k+s})\} \\ &+ g(I_{G(k+l'-1)} - \hat{p}_{k+l'}) - g(I_{G(k+l'-1)} - p_{k+l'}) + \hat{h}_{k+l'} - h_{k+l'} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。仮定より  $\sum$  内の各項はすべて正、かつ  $\hat{p}_{k+l'} \leq p_{k+l'}$  であるから  $g(I_{G(k+l'-1)} - \hat{p}_{k+l'}) - g(I_{G(k+l'-1)} - p_{k+l'}) + \hat{h}_{k+l'} - h_{k+l'} > 0$  より  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  を得る。□

補題 2 を用いて、以下に時間短縮問題の一般ケースの命題を導く。

**命題 1** 仮定 1-4 が成り立つとする。このとき、すべての  $t = 1, \dots, k-1$  について  $\hat{p}_t < p_t$  である。すなわち、 $h_t$  が増加したカテゴリのうち、最も上位のカテゴリ  $k$  より上位に属する全てのカテゴリについて、 $h_t$  増加後の競争家賃は増加前に比べて下落する。

証明.  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  であることを示せば十分である。 $t = k-1$  において、対応する家賃方程式の差をとることにより、

$$\begin{aligned} & g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) \\ &= g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_k) - g(I_{G(k-1)} - p_k) + \hat{h}_k - h_k \end{aligned} \quad (20)$$

を得る。仮定より  $\hat{h}_k > h_k$  である。もし  $\hat{p}_k \leq p_k$  ならば  $g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) > 0$  より  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  を得る。次に  $\hat{p}_k > p_k$  の場合を考える。もし  $k+1 \leq t \leq k+l-1$  なる範囲のある  $t$  について  $\hat{p}_t \leq p_t$  ならば、補題 2 を適用して  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  を得る。 $k+1 \leq t \leq k+l-1$  なる範囲のすべての  $t$  について  $\hat{p}_t > p_t$  であるとする。補題 2 の漸化式 (19) と同様の議論から  $g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1})$  は

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{l-1} \{g(I_{G(k+s-1)} - \hat{p}_{k+s}) - g(I_{G(k+s-1)} - p_{k+s})\} - \{g(I_{G(k+s)} - \hat{p}_{k+s}) - g(I_{G(k+s)} - p_{k+s})\} \\ &+ g(I_{G(k+l-1)} - \hat{p}_{k+l}) - g(I_{G(k+l-1)} - p_{k+l}) + \hat{h}_{k+l} - h_{k+l} \end{aligned} \quad (21)$$

と展開される。仮定より (21) の  $\sum$  記号内の項はすべて正である。また  $\hat{p}_{k+l} = p_{k+l}$  かつ仮定より  $\hat{h}_{k+l} - h_{k+l} = 0$  である。従って、この場合も  $g(I_{G(k-1)} - \hat{p}_{k-1}) - g(I_{G(k-1)} - p_{k-1}) > 0$  となり  $\hat{p}_{k-1} < p_{k-1}$  を得る。□

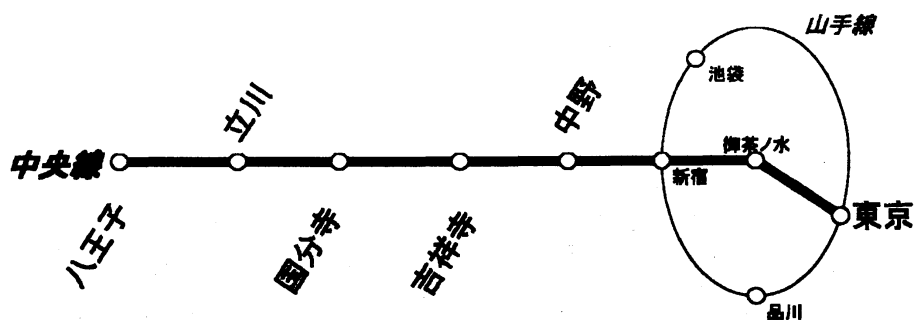


図 5: 中央線

## 4 数値例

### 4.1 家賃方程式の構成と競争家賃の算出

ここで2.4節までの内容を数値例で振り返る。本例は Kaneko et al. [6] に基づくものであり、東日本旅客鉄道株式会社（JR 東日本）の中央本線（以下、中央線）沿いの賃貸住宅市場を対象とする。中央線は東京を起点にして山梨県を通り、名古屋に至る延長約400 kmの路線で、特に新宿から八王子に至るまでの区間は東京を中心とした一大通勤圏をなす。各地区には、賃貸住宅が豊富に供給されており、本モデルの適用例として適当であると思われる。図5は中央線の概要である。

実際の解析に先立って、効用関数の特定化、アパート効用値および限界家計の所得の算定などの準備が必要である。以下、これらの事項を順に解説する。

#### 4.1.1 効用関数とアパートの順位付け

簡単のため、アパートは二つの属性によってカテゴリ化されるものとする。属性の一つは通勤の利便性であり、都心の駅から各地域の最寄り駅までの所要時間で計られる。本例では中央線の代表的な地区の最寄駅として表4の「所要時間（分）と駅名」の欄にある5つを考える。駅名の左の数値が東京駅から各駅までの所要時間（分）である。

二つめの属性はアパートの広さである。これを部屋数や入居対象者（単身または家族向）などを勘案して適当に区分する。アパートの広さは賃貸住宅情報誌あるいはwww上の商用サイトなどから知ることができる。本例のデータの出処は、2002年5月23日付の「Yahoo! 不動産<sup>5</sup>」である。本例では表4の如く $m^2$ 単位で4種類に区分した。例えば「26-45」と表記された列は、居住面積 $26m^2$ 以上 $46m^2$ 未満のアパートを意味する。以上より、本例では5つの駅（通勤時間）と4つの広さから、全部で $T = 5 \times 4 = 20$ カテゴリを考えることになる。

<sup>5</sup><http://realestate.yahoo.co.jp/>

表 4: 順位、効用値および供給数

所要時間 (分) 駅名	広さ (m <sup>2</sup> )											
	<25			26-45			46-65			66-85		
18: 中野	15	19.2	100	10	95.2	62	5	171.2	24	1	247.2	13
29: 吉祥寺	17	-3.9	65	12	72.1	30	7	148.1	17	2	224.1	10
42: 国分寺	18	-31.2	62	13	44.8	44	8	120.8	27	3	196.8	17
49: 立川	19	-45.9	53	14	30.1	58	9	106.1	44	4	182.1	3
60: 八王子	20	-69.0	76	16	7.0	41	11	83.0	19	6	159.0	7

凡例

$k$	$h_k$	$\omega_k$
-----	-------	------------

効用関数  $u: X \rightarrow R$  を

$$U(s, t, c) = 3.8s - 2.1t + 300\sqrt{c/10} \quad (22)$$

とおく。ここで、 $s$  はアパートの広さの変数で、広さ区分 <25, 26-45, 46-65, 66-85 (m<sup>2</sup>) のそれぞれに対して 15, 35, 55, 75 の値をとる。 $t$  は通勤時間の変数で、18, 29, 42, 49, 60 の値をとる。また  $c$  は家賃支払い後の所得 (千円) である。なお、各変数の係数は家賃方程式の解と各カテゴリデータの差の平方和ができるだけ小さくなるように定めた値である。

表 4 に従って、(22) の最初の 2 項に  $s$  と  $t$  を代入すると各カテゴリに対する  $3.8s - 2.1t$  の値を得る。これらを記号  $h_k$  で表すことにすると (22) は  $u(e^k, c) = h_k + 300\sqrt{c/10}$  となる。 $h_k$  はカテゴリ  $k$  のアパートから得られる効用値である。以後、これをアパート効用値と呼ぶ。 $h_k$  の大きさ順に各カテゴリに番号を付ければ、アパートの品質とカテゴリ番号とが仮定 F のように対応する。最も効用値が小さいのは八王子駅周辺の 25m<sup>2</sup> 以下の広さのカテゴリで、これが限界カテゴリ  $f = 20$  となる。

表 4 の各セルは凡例の如く三つの値  $k$ ,  $h_k$  および  $\omega_k$  からなる。 $\omega_k$  は第  $k$  カテゴリに属するアパートの総供給数で、これらは先述のデータから得られる累計数である。これらの物件のすべてについて賃貸契約がなされるものと仮定する。すなわち、この例では  $\sum_{k=1}^{20} \omega_k = 772$  個の家計がすべて所得順に  $k = 1, \dots, f = 20$  のカテゴリのアパートに入居する。

#### 4.1.2 限界家計とその所得および競争家賃の算出

民間住宅推進委員会らの調査 [12] によると、賃貸住宅に入居している家計の平均月収は約 15 万円から 75 万円である。簡単のため 772 個の家計の間でこの所得が一様分布すると仮定する。これに基づいて  $G(1), \dots, G(19)$  およびその所得を定める。例えばカテゴリ 1 の限界家計は  $G(1) = 13$  で、所得は  $I_{G(1)} = I_{13} = 741$  (千円) となる。以上をまとめたものを図 6 に示す。なお、限界カテゴリの家賃は  $p_f = p_{20} = 52$  (千円) であるとする。この値は限界カテゴリ  $f = 20$  のアパート 76 戸の平均家賃である。以上の設定に基づく解析結果を表 6 に示す。表 6 の各セルの三つの値は左からそれぞれカテゴリ番号  $k$ , 計算された競争家賃  $p_k$  および平均家賃  $\bar{p}_k$  である。

表 5: 限界家計とその所得 (× 1,000 円)

所要時間 (分) と駅名	広さ (m <sup>2</sup> )											
	<25			26-45			46-65			66-85		
18: 中野	15	381	475	10	576	224	5	699	67	1	741	13
29: 吉祥寺	17	299	581	12	534	273	7	680	91	2	733	23
42: 国分寺	18	250	643	13	504	317	8	659	118	3	720	40
49: 立川	19	209	696	14	459	375	9	625	162	4	717	43
60: 八王子	20	150	772	16	349	516	11	562	243	6	693	74

凡例

$k$	$I_{G(k)}$	$G(k)$
-----	------------	--------

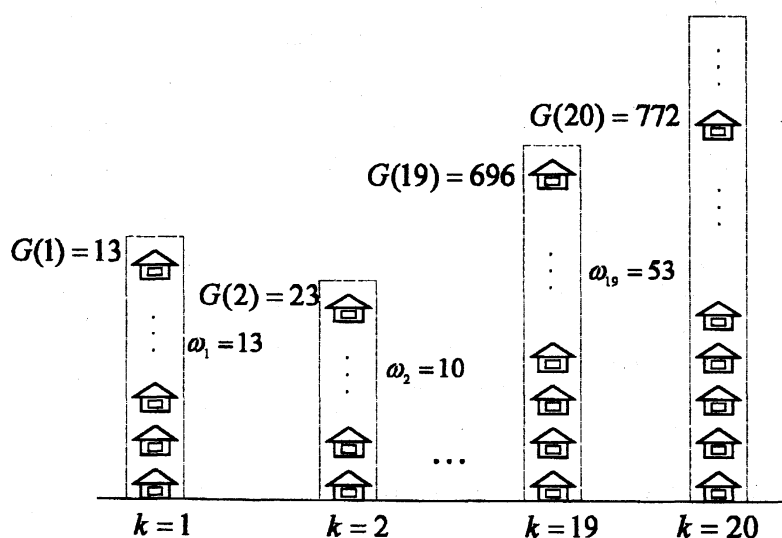


図 6: 各カテゴリの限界家計

表 6: 計算された家賃と平均家賃 (× 1,000 円)

所要時間 (分) と駅名	広さ (m <sup>2</sup> )											
	<25			26-45			46-65			66-85		
18: 中野	15	80	71	10	113	107	5	150	157	1	188	237
29: 吉祥寺	17	71	76	12	103	104	7	139	154	2	177	228
42: 国分寺	18	63	57	13	90	78	8	125	112	3	163	161
49: 立川	19	58	54	14	84	78	9	118	103	4	156	144
60: 八王子	20	52	52	16	75	71	11	108	100	6	144	125

凡例

$k$	$p_k$	$\bar{p}_k$
-----	-------	-------------

表 7: アパート効用値の増加 (特殊なケース)

所要時間 (分) と駅名	広さ (m <sup>2</sup> )											
	<25			26-45			46-65			66-85		
18: 中野	15	19.2	100	10	95.2	62	5	171.2	24	1	247.2	13
29: 吉祥寺	17	-3.9	65	12	72.1	30	7	148.1	17	2	224.1	10
42: 国分寺	18	-31.2	62	13	44.8	44	8	120.8	27	3	196.8	17
49: 立川	19	-45.9	53	14	30.1	58	9	<u>120.0</u>	44	4	182.1	3
60: 八王子	20	-69.0	76	16	7.0	41	11	83.0	19	6	159.0	7

凡例

$t$	$\hat{h}_t$	$\omega_t$
-----	-------------	------------

表 8: 特殊なケースの計算結果および家賃の変化 (× 1,000 円)

$t$	$p_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{p}_t - p_t$	$t$	$p_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{p}_t - p_t$
1	188.28	188.08	-0.207	11	107.50	107.50	0.000
2	176.78	176.57	-0.209	12	102.59	102.59	0.000
3	163.12	162.91	-0.212	13	90.50	90.50	0.000
4	155.79	155.58	-0.213	14	84.17	84.17	0.000
5	150.33	150.12	-0.214	15	79.71	79.71	0.000
6	144.29	144.08	-0.216	16	75.23	75.23	0.000
7	138.89	138.68	-0.217	17	71.41	71.41	0.000
8	125.42	125.21	-0.219	18	62.65	62.65	0.000
9	118.24	124.82	6.573	19	58.38	58.38	0.000
10	113.06	113.06	0.000	20	52.34	52.34	0.000

## 4.2 アパート効用値の変化と家賃の比較静学

前節に引き続き、第3節で展開した諸命題を検証する。本節の構成は以下のようである。まず4.2.1節で定理5 (特殊なケース)、次に4.2.2節では命題1 (一般のケース) を検証する。最後に4.2.3節で3.3節の定理6 (所得増加の効果) を検証し、4.2.1節の結果と対比する。

### 4.2.1 特殊なケース

変化前のアパート効用値はp.21の表4のようであるとする。いま、第9位のカテゴリ (立川駅周辺の46-65m<sup>2</sup>級アパート) においてアパート効用値が増加し、表7のようになったとする。ただし、3.2節で述べたように、この例ではアパート効用値が増加することの効果を見出すことに主眼を置いている。このため表4と表7とで通勤時間の欄は変わらない。

計算結果を表8に示す。表8は競争家賃 $p_t$ 、 $\hat{p}_t$ とその差を併記したものである。また図7は変化前の競争家賃を基準にした変化量のプロットである。表8より $t=1, \dots, 10$ について定理5の命題i) が成立していることがわかる。また、カテゴリ $k=9$ では $\hat{p}_9 > p_9$ となっている。これは命題ii) に対応するものである。一方、カテゴリ $k-1=8$ では逆に競争家賃は下落し、これ



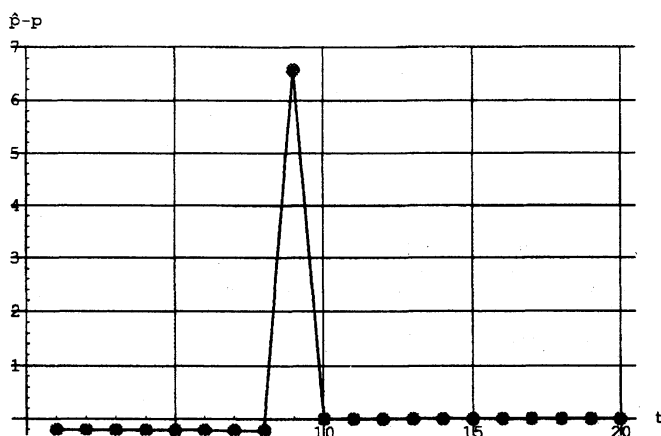


図 7:  $\hat{p} - p$  (特殊なケース, 単位: 1,000 円)

表 9: アパート効用値の増加 (一般のケース)

所要時間 (分) と駅名	広さ (m <sup>2</sup> )											
	<25			26-45			46-65			66-85		
18: 中野	15	19.2	100	10	95.2	62	5	171.2	24	1	247.2	13
29: 吉祥寺	17	-3.9	65	12	72.1	30	7	148.1	17	2	224.1	10
42: 国分寺	18	-31.2	62	13	44.8	44	8	120.8	27	3	196.8	17
45: 立川	19	-37.5	53	14	38.5	58	9	114.5	44	4	190.5	3
60: 八王子	20	-69.0	76	16	7.0	41	11	83.0	19	6	159.0	7

凡例

$t$	$\hat{h}_t$	$\omega_t$
-----	-------------	------------

以降第 1 カテゴリまでのすべてのカテゴリで競争家賃は下落する。これが命題 iii) に対応する。さらに、命題 iv) に示したとおり、家賃変化量について  $\hat{p}_8 - p_8 < \hat{p}_7 - p_7 < \dots < \hat{p}_1 - p_1 < 0$  の関係が見られる。

#### 4.2.2 一般のケース

本節では命題 1 (一般のケース) を検証する。東京-立川間の所要時間が 49 分から 45 分に短縮されたとする。このとき、表 4 の立川駅の行において  $h_t$  が増加し、表 9 のようになる。ただし、カテゴリの順位付けはこれによって変化しない。 $h_t$  が増加するカテゴリのうち、最も上位のカテゴリは  $k = 4$  である。

計算結果を表 10 および図 8 に示す。

表 9 より、このカテゴリより上位のカテゴリ  $t = 1, 2, 3$  については競争家賃が下落しており、命題 1 の主張が成立している。また、 $\hat{p}_3 - p_3 = -0.569 < \hat{p}_2 - p_2 = -0.563 < \hat{p}_1 - p_1 = -0.557 < 0$  であり、一般のケースにおいても定理 5 の命題 iv) が成立することを確認できる。

表 10: 一般のケースの計算結果および家賃の変化 (× 1,000 円)

$t$	$p_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{p}_t - p_t$	$t$	$p_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{p}_t - p_t$
1	188.28	187.73	-0.557	11	107.5	107.05	-0.457
2	176.78	176.22	-0.563	12	102.59	102.13	-0.459
3	163.12	162.55	-0.569	13	90.5	90.03	-0.465
4	155.79	159.41	3.626	14	84.17	87.32	3.154
5	150.33	149.76	-0.568	15	79.71	79.44	-0.269
6	144.29	143.72	-0.571	16	75.23	74.96	-0.271
7	138.89	138.32	-0.573	17	71.41	71.14	-0.273
8	125.42	124.84	-0.581	18	62.65	62.37	-0.278
9	118.24	121.77	3.527	19	58.38	60.55	2.167
10	113.06	112.60	-0.454	20	52.34	52.34	0.000

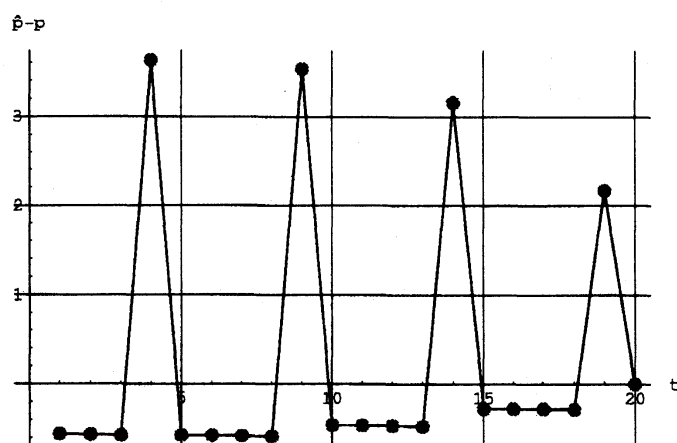
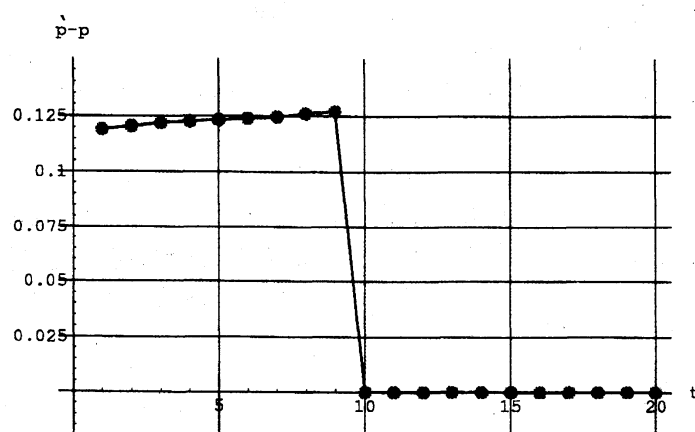
図 8:  $\hat{p} - p$  (一般のケース, 単位: ×1,000 円)

表 11:  $I_{G(9)}$  増加の効果 ( $\times 1,000$  円)

$t$	$p_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{p}_t - p_t$	$t$	$p_t$	$\hat{p}_t$	$\hat{p}_t - p_t$
1	188.28	188.40	0.119	11	107.50	107.50	0.000
2	176.78	176.90	0.120	12	102.59	102.59	0.000
3	163.12	163.25	0.122	13	90.50	90.50	0.000
4	155.79	155.91	0.1227	14	84.17	84.17	0.000
5	150.33	150.45	0.1232	15	79.71	79.71	0.000
6	144.29	144.42	0.124	16	75.23	75.23	0.000
7	138.89	139.02	0.125	17	71.41	71.41	0.000
8	125.42	125.55	0.126	18	62.65	62.65	0.000
9	118.24	118.37	0.127	19	58.38	58.38	0.000
10	113.06	113.06	0.000	20	52.34	52.34	0.000

図 9:  $\hat{p} - p$  ( $I_{G(9)}$  増加の効果, 単位:  $\times 1,000$  円)

#### 4.2.3 効用値変化の効果と所得変化の効果

定理 6、すなわち 1 つのカテゴリのみで限界家計の所得が増加したときの効果を検証する。4.2.1 節では  $h_9$  の増加を想定したので、ここでは  $I_{G(9)}$  が増加したと仮定する。ただし、この変化の前後でアパートの供給数に変化はないものとする。限界家計の所得の関係は  $I_{G(1)} = \hat{I}_{G(1)} > \dots > I_{G(8)} = \hat{I}_{G(8)} > \hat{I}_{G(9)} > I_{G(9)} > \dots > I_{G(20)} = \hat{I}_{G(20)}$  となる。表 5 を参照して、カテゴリ 9 の限界家計の所得が  $I_{G(9)} = 625$  (千円) から  $\hat{I}_{G(9)} = 650$  (千円) へ増加したと想定する。

計算結果の表 11, 図 9 よりカテゴリ  $k = 1$  から 9 までのすべてのカテゴリで競争家賃が増加しており、その増加量について  $\hat{p}_9 - p_9 > \hat{p}_8 - p_8 > \dots > \hat{p}_1 - p_1 > 0$  であることがわかる。これらはそれぞれ定理 6 の命題 ii), iii) および iv) に対応する。

## 5 結論と今後の課題

本稿は非分割財の市場としての賃貸住宅（アパート）市場の比較静学分析を扱ったものであり、アパートの品質の変化がその価格（家賃）に及ぼす影響を議論した。特に大都市圏において都心への通勤に利用される賃貸住宅に焦点をあて、都心への交通体系の改善が生じたとき、価格がどのような挙動を示すかについて、Kaneko et al.[6] の市場モデルおよび比較静学理論に基づいて考察している。以下に本稿の要約と本研究を通じて得られた知見をまとめる。

1. Kaneko et al.[6] の比較静学理論に基づき、アパート効用値の変化と競争家賃の変化について考察した。
2. 家賃方程式とアパート効用値の増加の関係を考察することにより、通勤時間の短縮が競争家賃を増加させるのは、ほとんどの場合、時間短縮が生じた地域のみであり、それ以外の地域では競争家賃は不変であるかまたは逆に改善前に比べて下落するという定理を導いた。これにより、路線の一部で通勤快速が新たに運行されるなどの変化は、都心部のアパートの家賃を下落させる可能性があると考えられる。
3. 上記の定理と、家計の所得（限界家計の所得）増加が競争家賃に与える影響とを対比させた。その結果、都心部などの品質の良いアパートの競争家賃の変化について、両者は対称の効果を与えることがわかった。
4. 上記の 2, 3 の結果を既存の比較静学理論を接続し、これらの関連性を明らかにした。
5. 上記の 2, 3 について、JR 中央線沿線を例にとって数値計算による検証を行った。
6. 以上により、Kaneko et al.[6] の数学的モデルに基づく比較静学理論で扱われる市場パラメータ変化に比較して、より細かいパラメータ変化の効果に対する考察を加え、比較静学理論の現実問題への適用・展開に資するところとなった。

今後の展開の方向性について、二点述べる。いずれも 3.1 節で述べた諸仮定に関するものである。本稿で得られた主な諸命題はすべて 3.1 節の諸仮定の下に成り立つものである。本文中で既に述べたように、これらの仮定のうち、効用関数の形状に関するもの（仮定 1）と、カテゴリの順位付けに関するもの（仮定 4）は特に制約的である。

まず効用関数の形状については、アパート効用値と貨幣の効用値が線形に分離されていること、および貨幣項  $g$  の凹性（アパートが正常財）は諸命題の展開に不可欠であった。後者については、別の論文で考察する予定である。一方、前者の妥当性をモデルの側から述べることは難しい。従って、一つの方向としては、実際の市場データを用いて、統計学的な接近法により効用関数の形状を同定することが考えられる。

また、アパート効用値の増加（または減少）により各カテゴリの順位付けが攪乱される場合の取り扱いについては、現在、数値シミュレーションにより理論展開の方向性を模索している途上である。附録に示したように、交通体系の一部改善により都心部で家賃下落が生じるという傾向は保たれるものと推察される。今後、まず単純な例についてこの問題の構造を把握し、本稿で得られた結論のより一般的な事例への適用を試みる。

## 参考文献

- [1] Alonso, W., (1964), *Location and Land Use*, Harvard University Press, Cambridge.
- [2] Kaneko, M., (1976), Note on Transferable Utility, *International Journal of Game Theory* 6, 183-185.
- [3] Kaneko, M., (1982), The Central Assignment Game and the Assignment Markets, *Journal of Mathematical Economics* 11 (1982), 205-232.
- [4] Kaneko, M., (1983), Housing Market with Indivisibilities, *Journal of Urban Economics* 13 (1983), 22-50.
- [5] Kaneko, M., and Y. Yamamoto, (1986), The Existence and Computation of Competitive Equilibria in Markets with an Indivisible Commodity, *Journal of Economic Theory* 38, 118-136.
- [6] Kaneko, M., T. Ito, and Y. Osawa(2002), Comparative Statics in Rental Housing Market with indivisibilities, Discussion paper 1003, Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, Japan.
- [7] Miyake, M., (1994), Comparative Statics of Assignment Markets with General Utilities, *Journal of Mathematical Economics* 23, 519-531.
- [8] Ricardo, D., (1965), *The Principles of Political Economy and Taxation*, (1817: original), J.M.Dent and Sons, London.
- [9] Shapley, L and M. Shubik (1972), Assignment Game I: the Core, *International Journal of Game Theory* Vol.1, 111-130.
- [10] von Böhm-Bawerk, E., (1921), *Positive Theory of Capital*, translated by W. Smart, (Original publication in 1891) Books for Libraries, New York.
- [11] von Neumann, J., and O. Morgenstern, (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton.
- [12] 民間住宅推進委員会・三菱総合研究所 『貸家市場の現状と今後の貸家施策のありかた』 (年刊) 1993 年度版